

## Biblioteka 42

Izdavač: Naklada Jesenski i Turk  
Za izdavača: Mišo Nejašmić  
Urednik biblioteke: Ognjen Strpić

Prijevod: Ljerka Vukić i Ognjen Strpić  
Slog: Palatino 10.5/12 pt (L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X/Debian)  
Dizajn naslovnice: Božesačuvaj  
Tisak: ZRINSKI d. d., Čakovec

UDK 510.6:004 \*164:024

DAVIS, Martin

Na logički pogon: podrijetlo ideje računala /  
Martin Davis ; <prijevod Ljerka Vukić i Ognjen Strpić>  
– Zagreb : Naklada Jesenski i Turk, 2003. – Biblioteka 42

Prijevod djela : Engines of Logic. – Bibliografija. – Kazalo  
I. kompjutori – logičke osnove  
II. matematička logika – povijest

ISBN 953-222-138-7

**Na logički pogon  
podrijetlo ideje računala**

Martin Davis

Naklada Jesenski i Turk

Zagreb, 2003.

Izvornik:

Martin Davis, *Engines of Logic*, W. W. Norton and Company, New York, 2001.

Copyright © 2000 by Martin Davis

Copyright za hrvatsko izdanje © Naklada Jesenski i Turk

# Sadržaj

<b>Predgovor</b>	<b>9</b>
<b>Uvod</b>	<b>13</b>
<b>1 Leibnizov san</b>	<b>15</b>
Leibnizova divna ideja . . . . .	17
Pariz . . . . .	19
Hannover . . . . .	26
Univerzalna karakteristika . . . . .	28
<b>2 Boole pretvara logiku u algebru</b>	<b>35</b>
Težak život Georgea Boolea . . . . .	35
Algebra logike Georgea Boolea . . . . .	47
Boole i Leibnizov san . . . . .	54
<b>3 Frege: od velikog otkrića do beznađa</b>	<b>57</b>
Fregeov Begriffsschrift . . . . .	64
Frege smišlja formalnu sintaksu . . . . .	69
Zašto je pismo Bertranda Russella bilo tako razorno? . . .	71

Frege i filozofija jezika . . . . .	73
Frege i Leibnizov san . . . . .	74
<b>4 Cantor: zaobilaznicom kroz beskonačnost</b>	<b>77</b>
Inženjer ili matematičar . . . . .	79
Beskonačnih skupova ima raznih veličina . . . . .	82
Cantorova potraga za beskonačnim brojevima . . . . .	88
Dijagonalna metoda . . . . .	93
Depresija i tragedija . . . . .	97
Presudna bitka? . . . . .	99
<b>5 Hilbert stiže u pomoć</b>	<b>103</b>
Rane Hilbertove pobjede . . . . .	105
Ususret novom stoljeću . . . . .	110
Kroneckerov duh . . . . .	112
Metamatematika . . . . .	119
Konačni slom . . . . .	124
<b>6 Gödel remeti planove</b>	<b>129</b>
Povratak Kroneckerovog duha . . . . .	133
Neodlučivi iskazi . . . . .	137
Kurt Gödel, programer . . . . .	143
Konferencija u Königsbergu . . . . .	145
Ljubav i mržnja . . . . .	148
Hilbertova presuda . . . . .	154
Tužan kraj jednog čudaka . . . . .	160
<b>7 Turing stvara svenamjensko računalo</b>	<b>163</b>
Dijete Imperija . . . . .	164
Hilbertov Entscheidungsproblem . . . . .	170
Turingova analiza postupka izračunavanja . . . . .	172
Turingovi strojevi u pogonu . . . . .	176
Turing primjenjuje Cantorovu dijagonalnu metodu . . . . .	182

Nerješivi problemi . . . . .	186
Turingov univerzalni stroj . . . . .	189
Alan Turing na Princetonu . . . . .	192
Rat Alana Turinga . . . . .	196
<b>8 Stvaranje prvih univerzalnih računala</b>	<b>203</b>
Tko je izumio računalo? . . . . .	203
John von Neumann i fakultet Moore . . . . .	206
ACE Alana Turinga . . . . .	215
Eckert, von Neumann i Turing . . . . .	218
Zahvalna nacija nagrađuje svog junaka . . . . .	221
<b>9 Nakon Leibnizovog sna</b>	<b>227</b>
Računala, mozak i um . . . . .	229
<b>Epilog</b>	<b>237</b>
<b>Bilješke</b>	<b>239</b>
<b>Bibliografija</b>	<b>271</b>
<b>Kazalo</b>	<b>283</b>

## Predgovor

Temu ove knjige čine ideje koje su omogućile stvaranje modernih računala i ljudi koji su te ideje razvijali. Netom nakon što sam završio doktorat iz matematičke logike na Sveučilištu Princeton, u proljeće 1951. godine, predavao sam na Sveučilištu Illinois. Predavanja su se temeljila na Turingovim zamislima. Na istom sveučilištu radio je i sâm Turing jedno desetljeće prije mene. Moja predavanja je pohađao jedan mladi matematičar koji me upozorio da se u ulici nasuprot učionice upravo konstruiraju dva stroja za koja je bio uvjeren da su nastala na osnovu Turingovih zamisli. Ubrzo sam počeo pisati programe za ta prva računala. Pola stoljeća sam se profesionalno bavio vezom između apstraktnih logičkih ideja koje stoje u pozadini modernih računala i njihove realizacije.

Računala su pedesetih godina bila ogromna i jedva su mogla stati u sobu. Danas su to moćni strojevi koji mogu izvesti začuđujuć broj različitih zadataka, no logika koja stoji u njihovoj pozadini nije se promijenila. Ona se razvila iz radova nekolicine mislilaca kroz nekoliko stoljeća. U ovoj ću knjizi ispričati njihove životne priče i objasniti dio njihovih razmišljanja. Priče su same po sebi

zanimljive, no nadam se da čitatelji neće samo uživati u njima, već da će nakon što ih pročitaju bolje razumjeti što se zbiva unutar računala, a i da će barem malo više cijeniti apstraktno mišljenje.

Puno ljudi mi je pomoglo da napišem ovu knjigu. Zaklada John Simon mi je pružila financijsku potporu u početku istraživanja. Patricia Blanchette, Michael Friedman, Andrew Hodges, Lothar Kreiser i Benson Mates velikodušno su sa mnom podijelili svoje stručno znanje. Tony Sale je bio moj vodič u Bletchley Parku, gdje je u Drugom svjetskom ratu Turing dešifrirao tajne njemačke vojne poruke. Eloise Segal mi je pomogla da izbjegnem neke zamke u objašnjavanju određenih problema. Ona je predano iščitavala knjigu, ali nažalost nije doživjela njezino izdavanje. Supruga Virginia uporno mi je branila da budem nejasan. Sherman Stein je pažljivo pročitao rukopis, predložio razna poboljšanja i primijetio mnoge pogreške. U prevođenju su mi pomogli Egon Börger, William Craig, Michael Richter, Alexis Manaster Ramer, Wilfried Sieg i François Treves. Svojim komentarima pomogli su i Harold Davis, Nathan Davis, Jack Feldman, Meyer Garber, Dick i Peggy Kuhns i Alberto Policriti. Ed Barber, moj urednik u izdavačkoj kući W. W. Norton velikodušno je sa mnom podijelio svoje poznavanje pripovjedačkog stila u engleskom jeziku i zaslužan je za mnoga poboljšanja u tom pogledu. Harold Rabinowitz me upoznao s agentom Alexom Hoytom koji mi je puno pomogao. Ovim želim samo zahvaliti tim ljudima, a ne umanjiti svoju odgovornost za nedostatke knjige. Ispravke i komentare čitatelji mi mogu slati na adresu [davis@eipye.com](mailto:davis@eipye.com).

Martin Davis  
Berkeley, 2. siječnja 2000.



*Napomena uz ovo izdanje.* Knjiga je u tvrdom uvezu trebala izaći pod naslovom *The Universal Computer* i kad je bila pred tiskanjem, Julio Gonzales Cabillion i John McCarthy su me upozorili na nekoliko grešaka koje sam još stigao ispraviti. Zahvaljujem im i žao mi je što je bilo prekasno da im se zahvalim u predgovoru. Kad je knjiga izašla, Connie Holmes me upozorila da je jedan ulomak, za koji sam mislio da je savršeno jasan, zapravo dvosmislen. Connie sam upoznao na krstarenju Nilom, a grešku sam stigao ispraviti. Hvala Connie.

## Uvod

Ako bi se ispostavilo da temeljna logika stroja proizvedenog za izračunavanje diferencijalnih jednadžbi odgovara logici stroja koji radi račune u robnoj kući, smatrao bih to najčudnijom koincidencijom s kojom sam se ikada susreo.

—Howard Aiken, 1956.<sup>1</sup>

Vratimo se sada analogiji teoretskih računalnih strojeva... Možeće je pokazati da samo jedan jedini osobit stroj takve vrste može obavljati zadatke svih njih. Zapravo, on može služiti kao model bilo kojeg drugog stroja. Taj osobiti stroj možemo nazvati univerzalnim strojem.

—Alan Turing, 1947.<sup>2</sup>

U jesen 1945, na Elektrotehničkom fakultetu Moore u Philadelphiji završavalo se konstruiranje ENIAC-a, gigantskog računskog stroja s tisućama vakuumskih cijevi. Grupa stručnjaka redovito se sastajala kako bi raspravljala o planu za njegova nasljednika EDVAC-a. Tjedni su prolazili, a sastanci su postajali sve zaoštriji. Stručnjaci su se dijelili u dvije grupe o kojima se počelo govoriti kao o "inženjerima" i "logičarima". Voditelj inženjera John

Presper Eckert bio je s pravom ponosan na svoja postignuća s ENIAC-om. Smatralo se da je nemoguće da 15,000 vrelih vakuumskih cijevi radi tako dugo koliko je potrebno da postignu bilo što upotrebljivo. Pa ipak, uz upotrebu pažljivih, konzervativnih konstrukcijskih principa, Eckertu je to genijalno uspjelo. Vrhunac je bio kad je, na Eckertovo nezadovoljstvo, vodeći logičar grupe, eminentni matematičar John von Neumann, pustio u opticaj nacrt izvještaja o EDVAC-u. U njemu nije bilo puno konstrukcijskih detalja te je izlagao strukturu fundamentalnog *logičkog* računala. Do dan-danas ona se zove von Neumannova arhitektura.

Iako konstrukcijski *tour de force*, ENIAC je logički bio veoma zbrkan. Von Neumannovo poznavanje logike, i ono što je naučio od engleskog logičara Alana Turinga, omogućili su mu da shvati kako je računalni stroj zapravo logički stroj. On je nastao na osnovu pročišćenih uvida koje je značajan broj logičara razvijao stoljećima. Danas, kad računalna tehnologija napreduje tako zadivljujućom brzinom i kad se divimo istinski značajnim dostignućima inženjera, lako je previdjeti logičare čije ideje su to omogućile. Ovo je knjiga o njima.

# 1 Leibnizov san

Planinsko područje Harz, smješteno jugoistočno od njemačkog grada Hannovera, bogato je rudnim žilama. Tamo se ruda vadila još od sredine desetog stoljeća. Često se događalo da se u dubljim dijelovima rudnika počne nakupljati voda. Iskapanje su u takvim slučajevima omogućavale pumpe koje su tu vodu zadržavale. U sedamnaestom stoljeću pumpe su se snabdijevale vodenim kolom, pa bi se u zimskom periodu kada rijeke smrznu unosno vađenje rude moralo obustaviti.

Od 1680. do 1685. godine upravitelji rudnika planine Harz bili su u čestom sukobu s jednim potpuno beznadnim rudarom. Njemu je tada bilo tridesetak godina, a zvao se Georg Wilhelm Leibniz. Leibniz je tamo došao da uvede vjetrenjače kao dodatni izvor energije koji bi omogućio rudnicima da rade tijekom cijele godine. On je dotad već bio postigao mnogo. Ne samo da je došao do većih matematičkih otkrića, stekao je slavu i kao pravnik, a mnogo je pisao i o filozofskim i teološkim pitanjima. Čak je kao diplomat došao na dvor Louisa XIV, u pokušaju da uvjeri francuskog Kralja Sunca da je bolje provoditi vojne akcije u Egiptu nego na područjima Nizozemske i Njemačke.<sup>1</sup>

O nezgodama koje je s vjetrenjačama imao jedan melankolični Španjolac pisao je Cervantes sedamdesetak godina prije. Za razliku od Don Quijotea, Leibniz je patio od neizlječivog optimizma. Onima koji su bili ogorčeni zbog očiglednih nedaća u svijetu,

Leibniz je odgovarao da je Bog, sveznajući o svim mogućim svjetovima, nepogrešivo stvorio najbolji svijet koji je uopće moguće stvoriti i da je sve zle elemente našeg svijeta na najbolji mogući način uravnotežio s dobrima.\* No, Leibniz je u rudarskom projektu planine Harz na kraju doživio neuspjeh. U svom optimizmu nije predvidio da će stručni rudarski inženjeri biti neprijateljski raspoređeni prema novajliji koji ih želi naučiti njihovu poslu. Osim toga, zanemario je nepouzdanost vjetra i činjenicu da je potrebno određeno vrijeme da se novi stroj uhoda. No, najnevjerovatniji dio njegova optimizma odnosio se na ono što je zamislio zaraditi od toga projekta.

Leibniz je imao viziju iznenađujućeg dosega i veličine. Notacija koju je razvio za diferencijalni i integralni račun (kojom se još uvijek služimo), omogućila je da se komplicirano računanje izvodi bez mnogo razmišljanja. Kao da notacija sve napravi sama. U Leibnizovoj viziji nešto slično bilo je moguće napraviti za cjelokupno ljudsko znanje. Sanjao je o enciklopedijskom, univerzalnom umjetnom matematičkom jeziku kojim bi se moglo izraziti svako područje znanja, o pravilima izračunavanja koja bi otkrila sve logičke veze među izraženim iskazima. Konačno, sanjao je o strojevima koji mogu obavljati izračune i osloboditi um za kreativno mišljenje. Uza sav svoj optimizam, Leibniz je znao da taj san ne može pretvoriti u zbilju sâm. No, vjerovao je da bi mali broj sposobnih ljudi, koji bi zajedno radio u znanstvenoj akademiji, mogao za nekoliko godina dostići velik dio toga sna. Od projekta planine Harz Leibniz je zapravo želio zaraditi novac kojim bi financirao takvu akademiju.

---

\*Voltaireov dr. Pangloss iz *Candidea* shvaća svijet na ovakav "leibnizovski" način.

## Leibnizova divna ideja

Leibniz je rođen 1646. u Leipzigu. Njemačka je tada bila podijeljena u valjda tisuću zasebnih, politički poluautonomnih jedinica, i opustošena ratom koji je trajao gotovo tri desetljeća. Tridesetogodišnji rat završio je tek 1648. godine. Usprkos tome što su u njemu sudjelovale gotovo sve glavne evropske sile, vođen je uglavnom na njemačkom tlu. Leibnizov otac, profesor filozofije na Sveučilištu u Leipzigu, umro je kad je djetetu bilo svega šest godina. Iako su se njegovi učitelji tome protivili, Leibniz je u osmoj godini dobio pristup očevoj biblioteci i ubrzo je tečno čitao latinske tekstove.

Predodređen da postane jedan od najvećih matematičara svih vremena, prvi uvod u matematičke ideje dobio je od učitelja koji nisu ni naslućivali da negdje drugdje u Evropi matematika zapravo preinačuje iz temelja. U Njemačkoj toga doba čak je i elementarna euklidska geometrija bila napredni predmet koji se učio samo na akademskom nivou. Njegovi su ga učitelji u ranim dječaćkim godinama pak uveli u Aristotelov sustav logike star dvije tisuće godina i ta je tema probudila njegov matematički talent i strast. Fasciniran Aristotelovom podjelom pojmova u strogo određene "kategorije", Leibniz je došao do onoga što će kasnije nazvati svojom "divnom idejom": pokušati pronaći posebnu abecedu, čiji elementi ne bi predstavljali zvukove, nego pojmove. Jezik koji se temelji na takvoj abecedi trebao bi omogućiti da se simboličkim računom odredi koje su rečenice napisane u tom jeziku istinite, i koje logičke veze postoje među njima. Leibniz je ostao opčinjen čarima Aristotela i čvrsto se držao ove vizije do kraja života.

Tema Leibnizovog diplomskog rada, kojeg je napisao na Sveučilištu u Leipzigu, bila je upravo Aristotelova metafizika. Njegov se magistarski rad na istom Sveučilištu bavio vezom između filozofije i prava. Očito privučen i studiranjem prava, došao je i do drugog magisterija, ovaj put iz pravne znanosti i to s radom koji



Gottfried Wilhelm Leibniz

je naglasak stavio na korištenje sistematske logike u pravnoj problematici. Leibnizov prvi pravi doprinos matematici razvio se iz njegovog *Habilitationsschrift*a (nešto kao druga doktorska disertacija u Njemačkoj) iz filozofije. Kao prvi korak prema divnoj ideji abecede pojmova, naveo je potrebu da se pobroje različiti načini kombiniranja tih pojmova. To ga je dovelo do sistematične studije problema složenih kombinacija sastavljenih od osnovnih elemenata, prvo u *Habilitationsschriftu*, a onda i u opsežnijoj monografiji *De Arte Combinatoria*.<sup>2</sup>

Leibniz je nastavio studirati pravo, i doktorsku disertaciju iz pravnog područja obranio je na Sveučilištu u Leipzigu. Tema je bila tipično "leibnizovska": korištenje razuma u pravnom mišljenju kod slučajeva koji su preteški da bi ih se riješilo uobičajenim metodama. Fakultet u Leipzigu iz nejasnih je razloga odbio prihvatiti disertaciju pa ju je Leibniz predstavio na Sveučilištu Altdorf, blizu Nürnberga. Tamo je disertacija primljena s odobravanjem. U dvadeset i prvoj godini i sa završenim formalnim obrazovanjem, Leibniz se suočio s uobičajenim problemom mladog stručnjaka: kako napraviti karijeru.

## Pariz

Kako je bio nezainteresiran za karijeru sveučilišnog profesora u Njemačkoj, Leibniz je slijedio svoju jedinu alternativu, a ona je bila pokušati naći bogatog i plemenitog pokrovitelja. Našao ga je u baronu Johannu von Boineburgu, nećaku elektora Mainza, koji ga je zaposlio na modernizaciji pravnog sustava zasnovanog na rimskom građanskom pravu. Ubrzo je Leibniz imenovan sucem Prizivnog odjela Vrhovnog suda. Okušao se i u diplomatskim spletkama, uključujući i propali pokušaj da utječe na izbor novog kralja Poljske i posebno mu povjeren zadatak na dvoru Louisa XIV.

Tridesetogodišnji rat Francusku je učinio "supersilom" na



evropskom kontinentu. Mainz, gradić smješten na obalama Rajne, bio je za vrijeme rata okupiran. Zato su njegovi građani jako dobro razumjeli koliko je važno preduhitriti neprijateljske vojne akcije i stoga su održavali dobre veze s Francuskom. Upravo su zato Boineburg i Leibniz smislili plan da uvjere Louisa XIV i njegove savjetnike u to kako je puno bolje da objekt njihovih vojnih nastojanja bude Egipat. Najvažniji povijesni učinak ovog prijedloga – u biti istog onog koji je Napoleona doveo do vojne katastrofe više od stoljeća kasnije – bilo je to što je Leibniz došao u Pariz.

Leibniz je 1672. stigao u Pariz kako bi podupro plan o Egiptu i kako bi pomogao urediti neke Boineburgove financijske poslove. No prije kraja godine, iznenada se dogodila katastrofa. Stigla je vijest da je Boineburg umro od srčanog udara. Iako je nastavio vršiti neke usluge za obitelj Boineburg, Leibniz je ostao bez pouzdanog izvora prihoda. Usprkos tome, uspio je ostati u Parizu još četiri iznimno produktivne godine. U tom periodu dvaput je nakratko boravio u Londonu.<sup>3</sup> Pri prvom posjetu 1673. godine jednoglasno je izabran u londonsko Kraljevsko društvo na osnovu toga što je uspio izložiti računalni stroj koji može izvesti četiri osnovne aritmetičke operacije. Iako je Pascal konstruirao stroj koji može zbrajati i oduzimati, Leibnizov je bio prvi koji je mogao još množiti i dijeliti.\* Taj stroj je zapravo bila jedna veoma domišljata spravica koja je kasnije postala poznata kao "Leibnizov kotač". Često je korišten i u računskim strojevima dvadesetog stoljeća. O svom stroju Leibniz je pisao:

I sada, kad konačno smijemo pohvaliti stroj, možemo reći da će on biti koristan svima koji se bave računanjem, a to su, kao što znamo, knjigovođe, upravnici posjeda, trgovci, nadzornici, ge-

---

\*Blaise Pascal rođen je 19. lipnja 1623. u Clermont-Ferrandu u Francuskoj. Jedan je od osnivača matematičke teorije vjerojatnosti. Bio je plodan matematičar, fizičar i filozof religije. Oko 1643. konstruirao je i izgradio računalni stroj koji mu je donio popriličnu slavu. Umro je 1662. godine.

ografi, pomorci, astronomi... No, ograničimo se na upotrebu u znanosti. Stare geometrijske i astronomske tablice mogu se ispraviti te napraviti nove pomoću kojih možemo mjeriti sve vrste krivulja i oblika... isplati se proširiti velike pitagorejske tablice što je moguće više: tablicu kvadrata, kubova i ostalih potencija i tablice kombinacija, varijacija i progresija svih vrsta... Osim toga, astronomi zasigurno više neće morati vježbati strpljivost koja im je dosad bila potrebna za računanjem... Jer nije dostojno vrsna čovjeka da kao rob gubi vrijeme u računanju koje se pouzdano može prepustiti bilo kome tko se služi strojem.<sup>4</sup>

Iako je njegov stroj poznao samo jednostavnu aritmetiku, Leibniz je shvatio šire značenje mehanizacije izračunavanja. Godine 1674. opisao je stroj koji može riješiti algebarske jednadžbe. Godinu dana kasnije usporedio je logičko rasuđivanje s mehanizmom i tako se približio cilju: svesti rasuđivanje na neku vrstu računanja i na koncu izgraditi stroj koji takve izračune može izvesti.<sup>5</sup>

Kad mu je bilo dvadeset i šest godina, Leibniz je upoznao velikog nizozemskog znanstvenika Christiaana Huygensa, koji je tada živio u Parizu. To je bio presudan događaj u njegovu životu. Četrdesetogodišnji Huygens je tada već bio otkrio Saturnove prstene i izmislio sat s njihalom. Još nije uslijedio njegov najznačajniji doprinos, valna teorija svjetlosti. Huygensova koncepcija – da se svjetlost sastoji od valova poput onih koji se šire jezerom kad se u nj baci kamenčić – direktno se suprotstavljala velikoj Newtonovoj teoriji po kojoj je svjetlost sastavljena od roja odjelitih čestica u obliku taneta.\* Huygens je Leibnizu dao popis literature koji mu je omogućio da brzo nadomjesti nedostatak znanja iz područja suvremenih matematičkih istraživanja. Ubrzo je i Leibniz počeo značajnije doprinositi znanosti.

---

\*Iako je Huygensovo mišljenje s vremenom postalo općeprihvaćeno, dolazak kvantne fizike u dvadesetom stoljeću pokazao je da su i Newton i Huygens bili u pravu. Svaki je otkrio jedno bitno obilježje svjetlosti.

Dva su otkrića bila presudna za nagli razvoj matematičkih istraživanja u sedamnaestom stoljeću:

1. Sistematizirana je tehnika služenja algebarskim izrazima (uglavnom srednjoškolska algebra). Ta je moćna tehnika gotovo jednaka onoj kojom se danas služimo.
2. Descartes i Fermat su pokazali da se geometrija može svesti na algebru ako decimalni zarez prikazemo pomoću para brojeva.

Mnogi matematičari su pomoću ove nove tehnike počeli rješavati dotad nerješive probleme. Velik dio te tehnike uključivao je *limese*. To znači da su rješavali problem koristeći približne vrijednosti za traženi odgovor, koje se sustavno sve više približavaju traženom odgovoru. Ideja je bila ne zadovoljiti se ni sa kojom određenom približnom vrijednošću, nego "ići do limesa" da bi se dobilo *tačno* rješenje.

Primjer koji tu ideju može pojasniti je ovaj prikaz jednog od Leibnizovih ranih rezultata, na kojeg je bio vrlo ponosan:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Na lijevoj strani znaka "=" je poznati broj (koji se pojavljuje u formulama za površinu kruga.\* Na desnoj strani je ono što zovemo *beskonačni niz*. Pojedinačni brojevi koji se naizmjenično dodaju i oduzimaju nazivaju se *članovima* niza. Točkice (...) znače da se niz beskonačno nastavlja. Potpuni beskonačni model sastoji se od razlomaka s brojnikom 1 i uzastopnim neparnim brojevima koji se naizmjenično dodaju i oduzimaju, kao nazivnicima. Kako izgleda potpuni beskonačni model trebali bismo zaključiti na osnovu konačnog dijela koji je prikazan. Nakon što oduzmemo  $\frac{1}{11}$ ,

\*broj  $\frac{\pi}{4}$  zapravo je površina kruga radijusa  $\frac{1}{2}$ .

broj članova	zbroj na 8 decimalnih mjesta
10	0.76045990
100	0.78289823
1,000	0.78514816
10,000	0.78537316
100,000	0.78539566
1,000,000	0.78539792
10,000,000	0.78539816

Tablica približnih vrijednosti za Leibnizov niz

dodat ćemo  $\frac{1}{13}$ , zatim oduzeti  $\frac{1}{15}$ , i tako dalje. No je li zaista moguće izvesti neograničen broj zbrajanja i oduzimanja? Zapravo nije. No, ako počnemo od početka, a prekinemo u bilo kojem trenutku, dobit ćemo približnu vrijednost do "istinitog" odgovora. Ta približna vrijednost postaje to preciznija što više članova uključujemo. Zapravo, točnost približne vrijednosti ovisi o tome koliko članova želimo uključiti. U tablici je to prikazano za Leibnizove nizove. Ako uključimo 10,000,000 članova dobivamo vrijednost koja odgovara istinitoj vrijednosti  $\frac{\pi}{4}$ , to jest 0.7853981634..., na osam decimalnih mjesta.\*

Leibnizov niz na posebno jednostavan način povezuje broj  $\pi$  (površina kruga) i uzastopne neparne brojeve. On pokazuje jednu vrstu problema koji se mogu riješiti korištenjem limesa – to su problemi određivanja površina ispod krivulja. Druga vrsta problema koje možemo riješiti koristeći limese je točno određivanje brzine određene promjene, kao što je promjena brzine tijela koje se kreće.

\*Brojčani podaci koji se tiču Leibnizova niza za  $\frac{\pi}{4}$  dobiveni su pisanjem i puštanjem u pogon programa u Pascalu na PC 486 računalu na 33 MHz. Za rješavanje zadatka sa 100,000 članova trebalo je 50 sekundi, a za zadatak sa 10,000,000 članova osam minuta. Nakon dvije godine program je ponovno pušten u pogon na stroju Pentium 200 MHz i vremena su se smanjila na 4, odnosno 40 sekundi!