

PRADEEP KUMAR

VEDSKA MATEMATIKA

DREVNA TEHNIKA RAČUNANJA BEZ KALKULATORA

HARŠA-BREGANA
2014.

UVOD

Vedska matematika je pradavni matematički sustav koji potječe iz drevnih indijskih spisa pod nazivom Vede, koje datiraju iz vremena preko 5000 godina u prošlost. Riječ Veda na sanskrtu znači znanje.

Sanskrt je danas uglavnom «mrtvi» jezik kao i latinski jezik, ali je još uvijek sveti jezik Hindusa u Indiji. Svi su sveti tekstovi Hinduizma, od Veda i Upanišada pa do Bhagavad-Gite, napisani na sanskrtu.

Vedski sanskrt je arhaični oblik sanskrta kojim su napisane četiri svete Vede.

Vedski spisi obuhvaćaju znanje i vještine iz svih životnih područja, kako nematerijalnog (metafizičkog ili duhovnog), tako i materijalnog (trenutnog, prolaznog) područja života.

Ovo znanje nije nastalo na klasični koncipiran način induktivnim i deduktivnim metodama, već znanje koje su drevni sveci (Rišiji) na višim razinama svijesti kanalizirali i omogućili daljnje prenošenje kroz generacije sve do današnjih vremena.

Postoje četiri vrste Veda: Rig Veda, Yajur Veda, Sama Veda i Atharva Veda.

Vede sadrže i četiri Upavede:

Ayur-veda, Gandharva-veda, Dhanur-veda i Sthapatya-veda, a uz to i se dijeli na šest Vedanti.

Sthapatya-veda je područje arhitektonskog i strukturalnog ljudskog okruženja i svih vizualnih umjetnosti. U ovu Vedu ukomponirana je i **vedska matematika**.

Zanimljivo je svakako da ovo znanje matematike potječe iz davne povijesti, a nikako se ne uklapa u službenu povjesnu sliku kako je čovjek tada živio u špiljama i lovio životinje kamnim oružjem, već je jasno ostavljen trag o postojanju visoko razvijene civilizacije u davnoj prošlosti.

Smatra se da je vedsku matematiku sakupio i približio između ostalog i Zapadu u prošlom stoljeću Sri Bharati Krsna Tirthaji u periodu između 1911. i 1918.g. U prošlosti je vladala iluzija da je vedska matematika primjenjiva samo na sanskrtskom jeziku, no u novije vrijeme se spoznalo da je to grana matematike isto kao i aritmetika, geometrija, trigonometrija...

Prema njegovom pronalasku, sva se matematika sastoji od 16 Sutri (engl. Sutras) koje su u principu formule izražene riječima. Na primjer, «vertikalno i dijagonalno» je jedna od Sutri. Formula opisuje kako misao prirodno djeluje te na taj način je od velike pomoći učeniku jer ga usmjerava kako treba

PREDGOVOR

Sve što ste željeli znati o „Vedskoj Matematici“ je manifestacija i koagulacija originalnih ilustracija i metode brzog izračuna. Ovaj čarobni alat je jedinstven u svom području, te će služiti dvije svrhe:

- Pomoći će ubrzati brzinu računanja kod studenata i
- Bit će koristan kod priprema za prijemne ispite MBA/CAT

KAKO KORISTITI OVU KNJIGU

Najprije naučite sve metode i tehnike množenja objašnjene u ovoj knjizi u poglavlju o množenju. Zatim, napravite vježbe koje se nalaze na kraju svake teme, tako da se tehnike mogu razumjeti u potpunosti. Onda naučite tehnike kvadriranja i kubiranja.

Nakon toga, kad god se susretnete sa množenjem iznosa, pokušajte to riješiti pomoću formula i tehnika objašnjениh u ovoj

SADRŽAJ

UVOD	
PREDGOVOR	
MNOŽENJE	17
1. PRVA FORMULA	17
Množenje dvoznamenkastih brojeva sa dvoznamenkastim brojevima	18
Množenje troznamenkastih brojeva sa troznamenkastim brojevima	24
Primjene	27
2. BRZA FORMULA	32
Množenje znamenki blizu 100	32
Množenje znamenki blizu 50	38
Množenje znamenki blizu 200	41
Množenje znamenki blizu 150	44
Važnost baza u Brzim Formulama	46

3. TEHNIKA KRIŽANJA	52
Množenje dvoznamenkastih brojeva sa dvoznamenkastim brojevima	52
Množenje troznamenkastih brojeva sa dvoznamenkastim brojevima	58
Množenje četveroznamenkastih brojeva sa dvoznamenkastim brojevima	63
Množenje peteroznamenkastih brojeva sa dvoznamenkastim brojevima	67
Množenje troznamenkastih brojeva sa troznamenkastim brojevima	69
Množenje četveroznamenkastih brojeva s troznamenkastim brojevima	73
4. TEHNIKE MNOŽENJA NAPAMET	76
Množenje dvoznamenkastih brojeva sa dvoznamenkastim brojevima	76
Množenje troznamenkastih brojeva sa dvoznamenkastim brojevima	79
Množenje četveroznamenkastih brojeva sa dvoznamenkastim brojevima	81
Množenje peteroznamenkastih brojeva sa dvoznamenkastim brojevima	83
Množenje troznamenkastih brojeva sa troznamenkastim brojevima	85

DIJELJENJE	87
1. PRAVA MAGIJA	87
Nazivnik koji završava sa 9	87
Nazivnik koji završava sa 8	91
Nazivnik koji završava sa drugim znamenkama	94
Brojnik koji ima više od jedne znamenke nakon decimale	97
2. TEHNIKA KRIŽANJA	99
Format Dijeljenja	99
Dijeljenje brojeva s manjim troznamenkastim brojem (Znamenka markera = 1)	100
Dijeljenje brojeva s većim troznamenkastim brojem (Znamenka markera = 2)	108
Dijeljenje brojeva s četveroznamenkastim brojem	111
Dijeljenje na decimale	114
KVADRIRANJE	119
Kvadrati brojeva koji završavaju sa 5	119
Pronalaženje kvadrata susjednog broja	121
Napredna metoda	121
Obrnuta metoda	123
Formula množenja napamet za pronalaženje kvadrata	124

KUBIRANJE	127
DRUGI KORIJEN	133
Drugi korijen savršenog kvadrata	133
Pronalaženje drugog korijena u decimali	140
TREĆI KORIJEN	143
SIMULTANE JEDNADŽBE	147
Neobični tipovi - Tip I, Tip II	150
RIJEČ ZA SVE MATEMATIČKE ENTUZIJASTE	153
INSTITUT „ACHIEVER“	155

Množenje dvoznamenkastih brojeva sa dvoznamenkastim brojevima

Uzmimo primjer:

$$\begin{array}{r} 65 \\ \times 65 \\ \hline \end{array}$$

Kako biste to pomnožili na uobičajeni način? Riješimo to:

$$\begin{array}{r} 65 \\ \times 65 \\ \hline 325 \\ 390 \\ \hline 4225 \end{array}$$

Koje ste tu korake poduzeli?

- Prvo ste pomnožili 65 sa 5 i napisali to ispod linije (325).
- Onda ste pomnožili 65 sa 6 i napisali ispod prvog reda ostavljajući jedno mjesto s desne strane (390).
- Zbrojili ste brojeve iz prvog reda sa brojevima iz drugog reda, tako da ste najprije zbrajali znamenke koji se nalaze skroz desno, zbrajajući tako i sve ostale znamenke nakon toga, na uobičajen način.
- Kao odgovor dobili ste 4225.

Učinimo sada to koristeći magičnu metodu:

$$\begin{array}{r} 65 \\ \times 65 \\ \hline 4225 \end{array}$$

Što smo ovdje učinili?

- Pomnožili smo 5 sa 5, te napisali 25 na desnu stranu odgovora.
- Dodali smo 1 gornjoj lijevoj znamenci 6, da bi dobili 7.
- Onda smo ga pomnožili (7) sa donjom lijevom znamenkicom 6 i dobili 42, što pišemo na lijevu stranu odgovora.
- Dobili smo točan odgovor 4225.

Jeste shvatili?

Učinimo to još jednom metodom koju smo upravo naučili!

$$\begin{array}{r} 75 \\ \times 75 \\ \hline 5625 \end{array}$$

Ponovno ću objasniti metodu.

- Pomnožili smo 5 sa 5, te napisali 25 na desnu stranu odgovora.
- Dodali smo 1 gornjoj lijevoj znamenci 7, da bi dobili 8.

možemo izvesti bez promjene vrijednosti? Samo dodajte 0 s lijeve strane. Sada provjerimo da li je vaša formula primjenjiva na sljedećim primjerima:

$$\begin{array}{r} \text{(1)} \quad 46 \\ \times 44 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{(2)} \quad 47 \\ \times 43 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{(3)} \quad 48 \\ \times 42 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{(4)} \quad 49 \\ \times 41 \\ \hline \end{array}$$

Znam da je vaš odgovor potvrđan i sada možete upisati odgovore kao 2024, 2021, 2016 i 2009.

Zadaci:

Upotrijebite formulu za sljedeće primjere i napišite odgovore.

$$\begin{array}{r} \text{(1)} \quad 81 \\ \times 89 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{(2)} \quad 97 \\ \times 93 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{(3)} \quad 87 \\ \times 83 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{(4)} \quad 58 \\ \times 52 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{(5)} \quad 36 \\ \times 34 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{(6)} \quad 53 \\ \times 57 \\ \hline \end{array}$$

Množenje troznamenkastih brojeva sa troznamenkastim brojevima

Nakon što smo to učinili sa dvoznamenkastim brojevima, možemo li proširiti istu formulu i na troznamenkaste brojeve? Odgovor je da, možemo to učiniti.

U slučaju troznamenkastih brojeva prve dvije znamenke na lijevoj strani trebale bi biti iste i ukupna suma znamenaka na desnoj strani treba biti 10.

Uzmimo primjer:

$$\begin{array}{r} 115 \\ \times 115 \\ \hline \end{array}$$

U gore spomenutom slučaju, prve dvije znamenke na lijevoj strani su iste (11) i ukupna suma znamenaka na desnoj strani je 10, tako da ovdje možemo primijeniti našu formulu.

Koraci će biti:

- Pomnožite 5 sa 5 i stavite 25 sa desne strane.
 - Dodajte 1 broju 11, dobijajući 12.
 - Pomnožite 12 sa 11 i stavite 132 na lijevu stranu.
- Riješili smo zadatak.
- Odgovor je 13225.

Primjene

Upotrebljivost Prve Formule je vrlo široka. Možete koristiti ovu formulu kod množenja dvoznamenkastih brojeva kad su prve znamenke iste, ali ukupna suma zadnjih znamenaka nije deset. Recimo $\underline{67} \times 65$. Što ćete učiniti u tom slučaju?

67×65 može biti napisano kao $(65 + 2) \times 65$

Iz naše Prve Formule znamo da je

$$65 \times 65 = 4225.$$

Povrh toga, obvezni smo dodati $2 \times 65 = 130$ broju 4225.

Rješenje je 4355.

$$\begin{array}{r}
 67 \times 65 = (65 + 2) \times 65 \\
 65 \\
 \times 65 \\
 \hline
 + 2 \times 65 \\
 4225 \\
 \hline
 4225 + 130 \\
 \hline
 4355
 \end{array}$$

Možete li primijeniti gore spomenutu tehniku, da bi izračunali koliko je 68×64 ?

Da vidimo kako:

Možete raščlaniti 68×64 na dva načina.

Množenje znamenki blizu 200

Naučili smo množiti znamenke blizu 100 i 50 koristeći ‘Brzu Formulu’. Da li ova formula također vrijedi i za znamenke blizu 200? Da vidimo.

Dakle:

1. Baza je 100.
2. Razlika od znamenki je preuzeta iz 200.
3. $200 = 100 \times 2$
4. Tako ćemo brojeve dobivene unakrsnim križanjem pomnožiti sa 2.

Primjer:

$$\begin{array}{r}
 208 \\
 \times 211 \\
 \hline
 208 \quad / + \quad 8 \\
 211 \quad / + \quad 11 \\
 \hline
 2 \times (219) \times (\text{Baza}) / + 88 = 43888
 \end{array}$$

Unakrsnim križanjem
 $(208 + 11)$
 dobivamo 219.

Ovo možete provjeriti nekim drugim metodama množenja.

Uzmimo još nekoliko primjera.

3. TEHNIKA KRIŽANJA

Do sad ste naučili Prvu Formulu i Brzu Formulu. Dok ste to učili, sigurno ste se pitali što ćete učiniti kad ćete trebati množiti nejednake znamenke. Kad morate tro, četvero ili peteroznamenkaste brojeve množiti sa dvo ili troznamenkastim brojevima, ne brinite. Naučite tehnike predstavljene pod ovim naslovom, koje će vam zasigurno pomoći u rješavanju bilo kakvih množenja na koja ćete naići.

Množenje dvoznamenkastih brojeva sa dvoznamenkastim brojevima

Započnimo sa primjerom, koristeći konvencionalnu metodu:

$$\begin{array}{r} 68 \\ \times 48 \\ \hline 544 \\ 272 \\ \hline 3264 \end{array}$$

Koji su koraci koje smo poduzeli?

- Pomnožili smo 68 sa 8 i napisali rezultat u prvi red (544).
- Onda smo pomnožili 68 sa 4 i napisali rezultat ispod prvog reda, ostavljajući jedno mjesto na desnoj strani.
- Zbrojili smo ih, počevši sa krajnje desnom znamenkom.
- Dobili smo odgovor = 3264.

Množenje troznamenkastih brojeva sa dvoznamenkastim brojevima

Nakon što smo naučili tehniku množenja napamet za dvoznamenkaste brojeve sa dvoznamenkastim brojevima, nastavimo sa troznamenkastim brojevima sa dvoznamenkastim.

Počnimo s primjerima:

$$\begin{array}{r} abc \quad xy \quad ax/ay+bx/by+cx/cy \\ \hline \end{array}$$

- $336 \times 62 = 20\ 8\ 3\ 2$ - Rješenje
 $\begin{array}{r} 241 \\ \times 62 \\ \hline 482 \\ +120 \\ \hline 20832 \end{array}$ - Ostaci nakon svake faze
- $472 \times 24 = 11\ 3\ 2\ 8$ - Rješenje
 $\begin{array}{r} 472 \\ \times 24 \\ \hline 188 \\ +94 \\ \hline 11328 \end{array}$ - Ostaci nakon svake faze
- $638 \times 32 = 20\ 4\ 1\ 6$ - Rješenje
 $\begin{array}{r} 638 \\ \times 32 \\ \hline 1276 \\ +191 \\ \hline 20416 \end{array}$ - Ostaci nakon svake faze
- $436 \times 56 = 24\ 4\ 1\ 6$ - Rješenje
 $\begin{array}{r} 436 \\ \times 56 \\ \hline 2616 \\ +218 \\ \hline 24416 \end{array}$ - Ostaci nakon svake faze
- $538 \times 64 = 34\ 4\ 3\ 2$ - Rješenje
 $\begin{array}{r} 538 \\ \times 64 \\ \hline 3272 \\ +318 \\ \hline 34432 \end{array}$ - Ostaci nakon svake faze
- $654 \times 54 = 35\ 3\ 1\ 6$ - Rješenje
 $\begin{array}{r} 654 \\ \times 54 \\ \hline 3216 \\ +327 \\ \hline 35316 \end{array}$ - Ostaci nakon svake faze

Zadaci:

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| (1) 678×52 | (2) 272×36 | (3) 853×44 |
| (4) 422×73 | (5) 584×46 | (6) 346×28 |
| (7) 921×28 | (8) 841×83 | (9) 673×49 |
| (10) 674×59 | (11) 371×31 | (12) 849×47 |

Rješenja:

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| 1. 35256 | 2. 9792 | 3. 37532 |
| 4. 30806 | 5. 26864 | 6. 9688 |
| 7. 25788 | 8. 69803 | 9. 32977 |
| 10. 39766 | 11. 11501 | 12. 39903 |

A decorative graphic featuring a multiplication problem. The numbers 236 and 40 are aligned vertically with a multiplication sign between them. To the right of the multiplication sign is an equals sign followed by the result 9584. Below the problem, there is a horizontal line consisting of a dashed line above a solid line.



DIJELJENJE

1. PRAVA MAGIJA

Siguran sam da ćete biti oduševljeni nakon što naučite i razumijete ove metode. Vidjet ćete kako je to magično. Također, vidjet ćete da je sa tim vrlo lako raditi. Pokušajte ovim metodama podučiti što više ljudi možete.

Nazivnik koji završava na 9

Pronađite $\frac{73}{139}$ do 5 decimala.

139) 730 (0.52517

Pokušat ćemo to riješiti najprije

$$\begin{array}{r} 695 \\ \hline 350 \end{array}$$

pomoću konvencionalne metode:

$$\begin{array}{r} 278 \\ \hline 720 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 695 \\ \hline 250 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 139 \\ \hline 1110 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 973 \\ \hline 137 \end{array}$$

Sada pogledajmo čarobnu metodu:

$$\frac{73}{139} = \frac{7.3}{13.9} = \frac{7.3}{14} = 0.5\ 2\ 5\ 1\ 7 - \text{Rješenje}$$

~~3 7 2 1 1~~ - Ostatak

Provjerite, jesu li oba odgovora ista (?)

Konvencionalnom metodom naš odgovor sa 5 decimala je 0.52517.

Magičnom metodom, odgovor je također 0.52517.

Nema razlike u odgovorima. Međutim, postupak usvojen u obje metode je različit. Jedna od njih je mnogo teža od druge. Dopustite da objasnim korake.

Koraci:

- 73 je podijeljen sa 139 (znamenka završava sa 9).
- $\frac{73}{139}$ se smanjuje na $\frac{7.3}{13.9}$ ili $\frac{7.3}{14}$
- Počinjemo dijeljenjem 73 sa 14.
- Najprije stavite decimalnu točku; podijelite 73 sa 14. 5 je količnik i 3 je ostatak. 5 pišemo nakon decimalne točke, a 3 pišemo ispred 5 kao što je prikazano gore.
- Naš sljedeći zbirni broj je 35; podijelite 35 sa 14. Količnik(K) = 2 i Ostatak (O) = 7. K = 2 pišemo nakon 5 i O = 7 prije 2 (ispod).
- Naš sljedeći zbirni broj je 72; podijelite 72 sa 14. K = 5 i O = 2, K = 5 pišemo nakon 2 i O = 2 prije 5 (ispod).

2. TEHNIKA KRIŽANJA

Format Dijeljenja

Konvencionalni format za dijeljenje:

Djelitelj) Djeljenik (Količnik
 | Ostatak

Magični format za dijeljenje:

	Marker	Djeljenik
Djelitelj		Količnik ; Ostatak

Uzmimo primjer da to razjasnimo:

		178) 3246738 (
		Strana Količnika
Marker →	8	324673 : 8 Strana Ostatka
Djelitelj	17	Količnik : Ostatak

Neke važnije točke na koje treba обратити pozornost:

- Broj znamenki na strani ostatka je uvijek jednak broju znamenki na strani djelitelja.



KVADRIRANJE

Kvadriranje brojeva koji završavaju na 5

Makar sam to objasnio ranije u poglavlju o Prvoj Formuli, objasnit ću to još jednom za dobrobit studenata.

$$\begin{array}{r} 85^2 = \quad 85 \\ \times 85 \\ \hline 7225 \end{array}$$

Koraci:

- Pomnožite 5 sa 5 i stavite odgovor 25 na desnu stranu rješenja.
- Dodajte 1 do gornje lijeve znamenke 8, tj. $8 + 1 = 9$.
- Pomnožite 9 sa donjom lijevom znamenkicom 8, tj. $9 \times 8 = 72$, i odgovor stavite na lijevu stranu rješenja.
- Naše konačno rješenje je 7225.



KUBIRANJE

Da biste saznali dvoznamenkasti broj na treću potenciju, koristiti ćemo se ovom formulom:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

To se može pisati kao:

$$\begin{array}{r} a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 \\ 2a^2b \quad 2ab^2 \end{array}$$

Mi smo jednostavno podijelili $3a^2b$ i $3ab^2$ u dva dijela a^2b i a^2b i ab^2 , radi pojednostavljenja.

U gornjoj formuli, vidimo da se članovi a^3 , a^2b , ab^2 , i b^3 nalaze na vrhu, a dva člana $2a^2b$ i $2ab^2$ su smješteni na dnu. Kompletna formula nastaje kada dodate članove na vrhu onima na dnu.



DRUGI KORIJEN

Drugi korijen savršenog kvadrata

Za pronalaženje drugih korijena, moramo imati neko predznanje. Da vidimo:

**Zadnja
znamenka**

1^2	=	1	1
2^2	=	4	4
3^2	=	9	9
4^2	=	16	6
5^2	=	25	5
6^2	=	36	6
7^2	=	49	9
8^2	=	64	4
9^2	=	81	1
10^2	=	100	00

Pronalaženje drugog korijena u decimalama

U svim dosadašnjim primjerima imali smo ostatke, ali pokušajmo pronaći drugi korijen nepotpunih kvadrata.

Primjer:

$$\sqrt{732108}$$

$$\begin{array}{r}
 (1) \quad 121 \\
 - 25 \\
 \hline
 96
 \end{array}$$

Objašnjenje koraka:

$$\text{Broj znamenki u drugom korijenu} = \frac{n}{2} = 3$$

$$\begin{array}{r}
 (2) \quad 160 \\
 - 50 \\
 \hline
 110
 \end{array}$$

- Prva znamenka rješenja 8, O = 9,

$$\text{Djelitelj} = 16$$

$$\begin{array}{r}
 (3) \quad 148 \\
 - 85 \\
 \hline
 63
 \end{array}$$

- $92 \div 16, K = 5, O = 12$
- $21 - \text{Dupleks od } 5 = 96$
- $96 \div 16, K = 6, O = 16$

{Ako uzmemo K = 6,
dobivamo negativnu vrijednost}

$$\begin{array}{r}
 (4) \quad 150 \\
 - 90 \\
 \hline
 60
 \end{array}$$

Pronašli smo tri znamenke rješenja prije decimale. Sada ćemo pronaći znamenku rješenja nakon decimale.

- $160 - \text{Dupleks od } 55 = 110$
- $110 \div 16, K = 6, O = 14$



TREĆI KORIJEN

Za pronalaženje trećeg korijena potrebno je i neko predznanje.

		Zadnja znamenka	
1^3	=	1	1
2^3	=	8	8
3^3	=	27	7
4^3	=	64	4
5^3	=	125	5
6^3	=	216	6
7^3	=	343	3
8^3	=	512	2
9^3	=	729	9

Iz gornje ilustracije možemo primijetiti da zadnja znamenka od 2^3 je 8, 3^3 je 7 i obrnuto. Svi ostali se ponavljaju.



SIMULTANE JEDNADŽBE

Simultane jednadžbe su tema koja se često koristi. Stoga sam odlučio uključiti i ovu temu u knjigu.

Počnimo s primjerom:

$$\begin{array}{rcl} 5x & - & 3y = 11 \\ 6x & - & 5y = 9 \end{array}$$

Ako u ovom primjeru možemo pronaći vrijednost x, onda nam pronalaženje vrijednosti y neće biti teško. Da bi pronašli vrijednost x moramo napraviti takozvano operativno križanje.

* Operativno križanje

$$\begin{array}{rcl} 5x & - & 3y = 11 \\ 6x & - & 5y = 9 \end{array}$$

The diagram shows two equations. In the first equation, the term $3y$ is crossed out with a large X. In the second equation, the term $5y$ is crossed out with a large X. Arrows point from the equal signs of both equations towards the right side of the page, indicating that the equations are being solved simultaneously to find the value of x .

$$x =$$